

# L'Application Canonique $J : \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(X) \rightarrow \tilde{H}^1(X \hat{\otimes} X)$ n'est pas Surjective en Général

OMRAN KOUBA

Department of Mathematics

*Higher Institute for Applied Sciences and Technology*

P.O. Box 31983, Damascus, Syria.

*E-mail* : omran\_kouba@hiast.edu.sy

**Résumé :** On introduit la propriété  $H^1$ -projective, et on l'utilise pour construire un espace de Banach  $X$  pour lequel l'application canonique  $J : \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(X) \rightarrow \tilde{H}^1(X \hat{\otimes} X)$  n'est pas surjective.

## The Natural Map $J : \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(X) \rightarrow \tilde{H}^1(X \hat{\otimes} X)$ is not Surjective in General

**Abstract :** We introduce the  $H^1$ -projective property, and use it to construct a Banach space  $X$  such that the natural map  $J : \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(X) \rightarrow \tilde{H}^1(X \hat{\otimes} X)$  is not onto.

### Abridged English Version

In this Note all Banach spaces considered are complex. Let  $\mathbb{T}$  denote the interval  $[0, 2\pi]$ . For  $p \in [1, +\infty[$  and for a Banach space  $X$ , let  $\tilde{H}^p(X)$  be the closed subspace of  $L^p(\mathbb{T}; X)$  spanned by analytic polynomials with coefficients in  $X$ .

If  $T : X \rightarrow Y$  is a linear operator between two Banach spaces. Then the formula

$$\tilde{T} \left( \sum_{n=0}^m z^n x_n \right) = \sum_{n=0}^m z^n T(x_n)$$

defines an operator  $\tilde{T} : \tilde{H}^p(X) \rightarrow \tilde{H}^p(Y)$  with the same norm.

We will say that  $X$  is  $H^1$ -projective, if there exists a metric surjection  $\sigma : \ell^1(I) \rightarrow X$ —i.e.  $\sigma^*$  is an isometric embedding—such that  $\tilde{\sigma}$  is a surjection from  $\tilde{H}^1(\ell^1(I))$  onto  $\tilde{H}^1(X)$ . It is easy to see that  $X$  is  $H^1$ -projective, if and only if,  $H^1(\mathbb{C}) \hat{\otimes} X = \tilde{H}^1(X)$ ; and that such a space is of cotype 2. See [K].

For  $F = \sum_{n=0}^m h_n \otimes g_n \in \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)$ , we denote by  $J(F)$  the element in  $\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)$  defined by

$$J(F)(z) = \sum_{n=0}^m h_n(z) \otimes g_n(z).$$

It is easy to check that

$$\|J(F)\|_{\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)} \leq \|F\|_{\tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)}$$

hence one can extend  $J$  to an operator—still called  $J$ —from  $\tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)$  into  $\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)$  of norm one.

Gilles Pisier shows in [P1] that this operator is onto for many couples of Banach spaces  $(X, Y)$ , for instance if  $X$  and  $Y$  are type 2 spaces, or 2-convex Banach lattices.

Our purpose in this Note, is to construct a Banach space  $X$  such that the operator  $J$  associated to the couple  $(X, X)$  is not onto. To this end, we use the fact that if  $X$  is  $H^1$ -projective, then  $J : \widetilde{H}^2(X) \widehat{\otimes} \widetilde{H}^2(X) \rightarrow \widetilde{H}^1(X \widehat{\otimes} X)$  is onto, if and only if,  $X \widehat{\otimes} X$  is  $H^1$ -projective. It is then enough to find  $X$  which is  $H^1$ -projective while  $X \widehat{\otimes} X$  is not  $H^1$ -projective for some strong reason as being of no cotype. The construction is an adaptation of some ideas from [P2] and [P3]. Indeed, we prove the following theorem.

**Theorem.** *Every  $H^1$ -projective Banach space  $E$  can be isometrically embedded in an  $H^1$ -projective space  $X$  such that  $X \widehat{\otimes} X = X \overset{\vee}{\otimes} X$ .*

It is not difficult to find a space  $X$  satisfying the preceding theorem and such that both  $X$  and its dual  $X^*$  are of cotype 2, and satisfy Grothendieck's theorem. Only a minor modification of the construction is needed to prove this assertion.

## 1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS:

Les espaces considérés sont des espaces de Banach complexes. Soit  $X$  un espace de Banach, et  $p \in [1, +\infty[$ , on note  $\widetilde{H}^p(X)$  l'adhérence dans  $L^p(\mathbb{T}; X)$  des polynômes analytiques à coefficients dans  $X$ . ( $\mathbb{T}$  étant  $[0, 2\pi]$ ).

Si  $T : X \rightarrow Y$  est un opérateur borné d'un espace de Banach  $X$  dans un autre  $Y$ , alors la formule

$$\widetilde{T} \left( \sum_{n=0}^m z^n x_n \right) = \sum_{n=0}^m z^n T(x_n)$$

définit un opérateur borné  $\widetilde{T} : \widetilde{H}^p(X) \rightarrow \widetilde{H}^p(Y)$  de même norme.

On dira que  $X$  est  $H^1$ -projectif, s'il existe un ensemble  $I$ , une surjection métrique  $\sigma : \ell^1(I) \rightarrow X$  (*i.e.*  $\sigma^*$  est une injection isométrique) et une constante  $K$  telle que

$$\forall g \in \widetilde{H}^1(X), \quad \exists h \in \widetilde{H}^1(\ell^1(I)) \quad : \quad \widetilde{\sigma}(h) = g \quad \text{et} \quad \|h\|_{\widetilde{H}^1(\ell^1(I))} \leq K \|g\|_{\widetilde{H}^1(X)} \quad (1)$$

pour alléger l'écriture, on se contente d'exprimer ce qui précède en écrivant simplement " $X$  est  $H_1(K, \sigma, I)$ ". En effet cette propriété est équivalente à  $\widetilde{H}^1(\mathbb{C}) \widehat{\otimes} X = \widetilde{H}^1(X)$ , ce qui justifie la terminologie " $X$  est  $H^1$ -projectif".

d'après une remarque dans [HP], si  $X$  est  $H^1$ -projectif, alors  $X$  vérifie aussi (1) en remplaçant  $\widetilde{H}^1$  par  $\widetilde{H}^p$ .

On dira que  $(X, Y)$  a la propriété  $\mathcal{P}(c)$  si  $Y$  est un sous-espace fermé de  $X$  et si le quotient  $Q : X \rightarrow X/Y$  vérifie

$$\forall g \in \widetilde{H}^1(X/Y), \quad \exists h \in \widetilde{H}^1(X) \quad : \quad \widetilde{Q}(h) = g \quad \text{et} \quad \|h\|_{\widetilde{H}^1(X)} \leq c \|g\|_{\widetilde{H}^1(X/Y)} \quad (2)$$

Si  $I \subset J$ , on notera  $s$  l'injection canonique de  $\ell^1(I)$  dans  $\ell^1(J)$ , définie par  $s(x)(j) = x_j$  si  $j \in I$ , et  $s(x)(j) = 0$  si  $j \notin I$ .

Si  $F = \sum_{n=0}^m h_n \otimes g_n \in \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)$ , on appelle  $J(F)$  l'élément de  $\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)$  défini par

$$J(F)(z) = \sum_{n=0}^m h_n(z) \otimes g_n(z).$$

Il est facile de vérifier que

$$\|J(F)\|_{\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)} \leq \|F\|_{\tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)}$$

et donc  $J$  s'étend, par densité, en un opérateur (noté encore  $J$ ) de  $\tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)$  dans  $\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)$ .

Dans [P1], Gilles Pisier démontre que cet opérateur est surjectif, pour une large classe de couples d'espaces  $(X, Y)$ , par exemple, si  $X$  et  $Y$  sont de type 2, des treillis de Banach 2-convexes ou des espaces  $\mathcal{L}^\infty$ .

Le but de cette Note est de donner un exemple d'espace  $X$ , tel que l'opérateur  $J$  associé au couple  $(X, X)$  ne soit pas surjectif.

## 2. THÉORÈMES :

La proposition suivante explique la raison pour laquelle on a introduit la notion de  $H^1$ -projectivité.

**Proposition 1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces  $H^1$ -projectifs. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1.  $X \hat{\otimes} Y$  est  $H^1$ -projectif.
2. L'application  $J : \tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y) \rightarrow \tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)$  est surjective.

Preuve: 1.  $\Rightarrow$  2. Ceci est immédiat en notant que  $H^1 \hat{\otimes} X \hat{\otimes} Y$  est toujours contenu dans l'image par  $J$  de  $\tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)$ .

2.  $\Rightarrow$  1. Supposons que  $X$  est  $H_1(K, \sigma_1, I)$  et que  $Y$  est  $H_1(K, \sigma_2, J)$ . Rappelons que

$$\ell^1(I \times J) = \ell^1(I; \ell^1(J)) = \ell^1(I) \hat{\otimes} \ell^1(J).$$

Soit  $\sigma : \ell^1(I) \hat{\otimes} \ell^1(J) \rightarrow X \hat{\otimes} Y$  définie par  $\sigma(\alpha \otimes \beta) = \sigma_1(\alpha) \otimes \sigma_2(\beta)$ .  $\sigma$  est clairement une surjection métrique.

Soit  $F \in \tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)$ , alors d'après 2. il existe  $H = \sum_{n=0}^\infty h_n \otimes g_n$  dans  $\tilde{H}^2(X) \hat{\otimes} \tilde{H}^2(Y)$  tel que

$$J(H) = F \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^\infty \|h_n\|_{\tilde{H}^2(X)} \|g_n\|_{\tilde{H}^2(Y)} \leq c \|F\|_{\tilde{H}^1(X \hat{\otimes} Y)}.$$

D'après l'hypothèse de  $H^1$ -projectivité de  $X$  (resp.  $Y$ ), et en utilisant la remarque de [HP], on trouve, pour chaque  $n \geq 0$  une fonction  $h'_n \in \tilde{H}^2(\ell^1(I))$  (resp.  $g'_n \in \tilde{H}^2(\ell^1(J))$ ), telle que  $\tilde{\sigma}_1(h'_n) = h_n$  (resp.  $\tilde{\sigma}_2(g'_n) = g_n$ ), et telle qu'on ait la majoration suivante  $\|h'_n\|_{\tilde{H}^2(\ell^1(I))} \leq K' \|h_n\|_{\tilde{H}^2(X)}$  (resp.  $\|g'_n\|_{\tilde{H}^2(\ell^1(J))} \leq K' \|g_n\|_{\tilde{H}^2(Y)}$ ).

Considérons l'application canonique

$$J_1 : \tilde{H}^2(\ell^1(I)) \widehat{\otimes} \tilde{H}^2(\ell^1(J)) \longrightarrow \tilde{H}^1(\ell^1(I) \widehat{\otimes} \ell^1(J)),$$

et soit  $G = \sum_{n=0}^{\infty} h'_n \otimes g'_n$ , on a clairement

$$\|G\|_{\tilde{H}^2(\ell^1(I)) \widehat{\otimes} \tilde{H}^2(\ell^1(J))} \leq cK'^2 \|F\|_{\tilde{H}^1(X \widehat{\otimes} Y)}$$

et

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{T}, \quad \tilde{\sigma}(J_1(G))(z) &= \sigma(J_1(G)(z)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_1(h'_n(z)) \otimes \sigma_2(g'_n(z)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z) \otimes g_n(z) = F(z) \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{\sigma}(J_1(G)) = F \quad \text{et} \quad \|J_1(G)\|_{\tilde{H}^1(\ell^1(I \times J))} \leq cK'^2 \|F\|_{\tilde{H}^1(X \widehat{\otimes} Y)}$$

et ceci démontre la proposition.

Nous utiliserons aussi le résultat suivant de [K]:

**Proposition 2.** *Si  $E$  est  $H^1$ -projectif, alors  $E$  est de cotype 2.*

Il suffit donc de construire un espace  $H^1$ -projectif  $X$ , tel que  $X \widehat{\otimes} X$  ne le soit pas, c'est le cas si ce dernier n'a pas de cotype. L'espace du théorème 6 ci-dessous fournit donc l'exemple cherché.

Résumons la construction suivante de [P2], voir aussi [P3]:

$E_0, B$ , et  $S$  sont des espaces de Banach,  $S$  est un sous-espace fermé de  $B$ , et  $i : S \hookrightarrow B$  est l'injection canonique. Soit  $u : S \rightarrow E_0$  un opérateur de norm  $\leq \eta \leq 1$ ; alors il existe un espace de Banach  $E_1$ , un opérateur  $\tilde{u} : B \rightarrow E_1$  et une injection isométrique  $j : E_0 \hookrightarrow E_1$ , tels que  $\|\tilde{u}\| \leq 1$  et  $\tilde{u} \circ i = j \circ u$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\tilde{u}} & E_1 \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ S & \xrightarrow{u} & E_0 \end{array}$$

En effet, soit  $B_1 = B \oplus_1 E_0$ , c'est  $B \times E_0$  muni de la norme  $\|(b, e)\| = \|b\| + \|e\|$ , soit le sous-espace fermé  $\Gamma(u) = \{(t, -u(t)) : t \in S\}$  de  $B_1$ , et soit  $\pi : B_1 \rightarrow B_1/\Gamma(u)$  la surjection canonique. On pose  $E_1 = B_1/\Gamma(u)$ ,  $j(e) = \pi((0, e))$ , et  $\tilde{u}(b) = \pi((b, 0))$ ; il est alors facile de vérifier que  $E_1$ ,  $j$  et  $\tilde{u}$  ont les propriétés requises.

**Théorème 3.** Avec les mêmes notations, on suppose que  $(B, S)$  a  $\mathcal{P}(c)$ , que  $B$  est  $H_1(K, \sigma, I)$ ,  $E_0$  est  $H_1(K_{E_0}, \sigma_0, I_0)$ , et  $\eta \leq (1+c)/2$ . Alors, l'espace  $E_1$ , obtenu dans la construction précédente, est un espace  $H_1(K_{E_1}, \sigma_1, I_1)$  avec

$$I_0 \subset I_1, \quad j \circ \sigma_0 = \sigma_1 \circ s, \quad \text{et} \quad K_{E_1} = \max(K_{E_0}, 2cK).$$

Preuve: Soit  $I_1$  la réunion disjointe de  $I$  et  $I_0$ . Soit  $\sigma' : \ell^1(I_1) \rightarrow B_1$  l'application définie par  $\sigma'(x) = (\sigma(x|_I), \sigma_0(x|_{I_0}))$ , et  $\sigma_1 = \pi \circ \sigma' : \ell^1(I_1) \rightarrow E_1$ . Il est immédiat de voir que  $\sigma_1$  est une surjection métrique.

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\tilde{u}} & E_1 & \xleftarrow{\sigma_1} & \ell^1(I_1) \\ \uparrow i & & \uparrow j & & \uparrow s \\ S & \xrightarrow{u} & E_0 & \xleftarrow{\sigma_0} & \ell^1(I_0) \end{array}$$

Soit  $f = \sum_0^m e^{ik(\cdot)} a_k \in \tilde{H}^1(E_1)$  de norme  $\|f\|_{\tilde{H}^1(E_1)} < 1$ ; pour tout  $k$  on a  $a_k = \pi((y_k, \bar{e}_k))$ . D'après  $\mathcal{P}(c)$ , il existe  $g = \sum_0^{m_1} e^{ik(\cdot)} x_k \in \tilde{H}^1(B)$  telle que

$$\tilde{Q}(g) = \sum_{k \geq 0} e^{ik(\cdot)} Q(x_k) = \sum_{k \geq 0} e^{ik(\cdot)} Q(y_k)$$

et

$$\|g\|_{\tilde{H}^1(B)} \leq c \left\| \sum_{k \geq 0} e^{ik(\cdot)} Q(x_k) \right\|_{\tilde{H}^1(B/S)} \quad (2)$$

où  $Q : B \rightarrow B/S$  est le quotient canonique.

On pose alors, pour  $k \geq 0$ ,  $e_k = \bar{e}_k - u(x_k - y_k)$ , d'où  $a_k = \pi((x_k, e_k))$ , mais  $\|f\|_{\tilde{H}^1(E_1)} < 1$ , donc il existe  $t : \mathbb{T} \rightarrow S$  mesurable, telle que

$$\int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k=0}^{m_1} e^{ik\theta} x_k + t(\theta) \right\|_{\tilde{H}^1(B)} dm(\theta) + \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k=0}^{m_1} e^{ik\theta} e_k - u(t(\theta)) \right\|_{\tilde{H}^1(E_0)} dm(\theta) < 1 \quad (3)$$

notons  $\alpha, \beta$  respectivement la première et la seconde des intégrales précédentes. En utilisant (2) on a

$$\int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k=0}^{m_1} e^{ik\theta} x_k \right\|_{\tilde{H}^1(B)} dm(\theta) \leq c\alpha \quad (4)$$

et

$$\int_{\mathbb{T}} \|t(\theta)\|_{\tilde{H}^1(B)} dm(\theta) \leq (1+c)\alpha \quad (5)$$

et donc d'après (3) et (5)

$$\int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k=0}^{m_1} e^{ik\theta} e_k \right\|_{\tilde{H}^1(E_0)} dm(\theta) \leq \beta + \eta(1+c)\alpha \leq \beta + \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Il en résulte que pour  $g = \sum_0^{m_1} e^{ik(\cdot)} x_k \in \tilde{H}^1(B)$  (resp.  $g_0 = \sum_0^{m_1} e^{ik(\cdot)} e_k \in \tilde{H}^1(E_0)$ ), il existe  $h \in \tilde{H}^1(\ell^1(I))$  (resp.  $h_0 \in \tilde{H}^1(\ell^1(I_0))$ ) telle que  $\tilde{\sigma}(h) = g$  et  $\|h\|_{\tilde{H}^1(\ell^1(I))} \leq K\|g\|_{\tilde{H}^1(B)}$  (resp.  $\tilde{\sigma}_0(h_0) = g_0$  et  $\|h_0\|_{\tilde{H}^1(\ell^1(I_0))} \leq K_{E_0}\|g_0\|_{\tilde{H}^1(E_0)}$ ).

On définit alors,

$$h_1(j, \theta) = \begin{cases} h(j, \theta) & \text{si } j \in I \\ h_0(j, \theta) & \text{si } j \in I_0 \end{cases}$$

On a immédiatement  $\tilde{\sigma}_1(h_1) = f$  et

$$\|h_1\|_{\tilde{H}^1(\ell^1(I_1))} \leq K\|g\|_{\tilde{H}^1(B)} + K_{E_0}\|g_0\|_{\tilde{H}^1(E_0)} \leq \max(K_{E_0}, 2cK)$$

d'après (4), (6) et le fait que  $\alpha + \beta < 1$ .

En raisonnant par homogénéité, on obtient alors le corollaire suivant:

**Corollaire 4.** *On suppose que  $(B, S)$  vérifie  $\mathcal{P}(c)$ , que  $B$  est  $H_1(K, \sigma, I)$ ,  $E_0$  est  $H_1(K_{E_0}, \sigma_0, I_0)$ , et  $u : S \rightarrow E_0$ . Alors il existe  $E_1$ , une injection isométrique  $j : E_0 \hookrightarrow E_1$  et un opérateur  $\tilde{u} : B \rightarrow E_0$  tels que*

1.  $E_1$  est  $H_1(K_{E_1}, \sigma_1, I_1)$ , avec  $K_1 = \max(K_{E_0}, 2cK)$ ,  $I_0 \subset I_1$  et  $\sigma_1 \circ s = j \circ \sigma_0$ .
2.  $\tilde{u}|_S = j \circ u$ , et  $\|\tilde{u}\| \leq 2(1+c)\|u\|$ .

En suivant Pisier dans [P2], on en déduit:

**Corollaire 5.** *Soit  $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une famille d'espaces de Banach, telle que, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , l'espace  $B_\lambda$  est  $H_1(K_{B_\lambda}, \sigma_\lambda, J_\lambda)$ , et  $S_\lambda$  un sous-espace fermé de  $B_\lambda$  tel que  $(B_\lambda, S_\lambda)$  ait  $\mathcal{P}(c_\lambda)$ . On suppose*

$$K = \sup \{K_{B_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} < +\infty \quad \text{et} \quad c = \sup \{c_\lambda : \lambda \in \Lambda\} < +\infty.$$

*On considère, d'autre part, un espace de Banach  $E_0$  vérifiant  $H_1(K_{E_0}, \sigma_0, I_0)$  et une famille d'opérateurs  $\{u_\lambda : S_\lambda \rightarrow E_0\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Alors, Il existe  $E_1$ , une injection isométrique  $j : E_0 \hookrightarrow E_1$ , tels que*

1.  $E_1$  est  $H_1(K_{E_1}, \sigma_1, I_1)$  (avec  $K_1 = \max(K_{E_0}, 2cK)$ ),  $I_0 \subset I_1$  et  $\sigma_1 \circ s = j \circ \sigma_0$
2. Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $\tilde{u}_\lambda : B_\lambda \rightarrow E_1$  qui vérifie  $\tilde{u}_\lambda|_{S_\lambda} = j \circ u_\lambda$ , et  $\|\tilde{u}_\lambda\| \leq 2(1+c)\|u_\lambda\|$ .

Preuve: On se ramène par homogénéité à  $\forall \lambda \in \Lambda, \|u_\lambda\| \leq 1$ , et on pose

$$B = \ell^1(\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) = \left\{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} : x_\lambda \in B_\lambda \text{ et } \sum_{\lambda} \|x_\lambda\| < +\infty \right\}$$

et

$$S = \ell^1(\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) = \left\{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} : x_\lambda \in S_\lambda \text{ et } \sum_{\lambda} \|x_\lambda\| < +\infty \right\}.$$

On vérifie que  $(B, S)$  a la propriété  $\mathcal{P}(c)$ , et que  $B$  est  $H_1(K, \Sigma, J)$  (où  $J$  est la réunion disjointe de la famille  $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , et  $\Sigma$  est définie par  $\Sigma((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (\sigma_\lambda(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ). On définit alors,  $u : S \rightarrow E_0$  par

$$u((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \sum_{\lambda} u_\lambda(x_\lambda),$$

et on applique le corollaire 4.

**Théorème 6.** *Il existe une constante numérique  $\kappa$ , telle que, pour tout espace  $E_0$  qui est  $H_1(\mu, \sigma_0, I_0)$  avec  $\mu \geq \kappa$ , on peut trouver un espace  $E_1$  qui est  $H_1(\mu, \sigma_1, I_1)$ , et une injection isométrique  $j : E_0 \hookrightarrow E_1$ , telle que*

1.  $I_0 \subset I_1$  et  $\sigma_1 \circ s = j \circ \sigma_0$ .
2. Pour tout  $u \in E_0 \otimes E_0$  on a

$$\|j \otimes j(u)\|_{E_1 \hat{\otimes} E_1} \leq c(\mu) \|u\|_{E_0 \hat{\otimes} E_0}.$$

Preuve : Pour  $p \in [1, +\infty[$ , on note  $L_n^p$  l'espace  $\mathbb{C}^n$  muni de la norme

$$\|x\|_p = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p},$$

et on note  $i_n : L_n^2 \rightarrow L_n^1$  l'application identité. On sait par une variante d'un théorème de Kašin ([P3]; Chapitre 7), que l'on peut trouver une décomposition orthogonale;  $L_{3n}^2 = D_n^1 \oplus D_n^2 \oplus D_n^3$ , avec  $\dim D_n^k = n$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) et une constante  $\delta > 0$ , telles que, pour  $k = 1, 2$

$$\forall x \in D_n^k \oplus D_n^3, \text{ on a } \delta \|x\|_2 \leq \|i_{3n}(x)\|_1 \leq \|x\|_2.$$

Pour  $k = 1, 2$  on considère le quotient

$$Q_n^k : L_{3n}^1 \rightarrow B_n^k = L_{3n}^1 / i_{3n}(D_n^k),$$

et on pose  $S_n^k = Q_n^k(D_n^3)$ .

Remarquons que

$$B_n^k / S_n^k = L_{3n}^1 / i_{3n}(D_n^k \oplus D_n^3),$$

donc en utilisant le lemme ci-dessous (voir [K] pour une démonstration utilisant un résultat de [BD]), on voit facilement que les  $B_n^k$  sont  $H^1$ -projectifs, avec des constantes majorées indépendamment de  $n$ , et que les couples  $(B_n^k, S_n^k)$  vérifient  $\mathcal{P}(c)$  pour un  $c$  indépendant de  $n$ .

**Lemme.** *On suppose qu'il existe  $\delta > 0$ , et des sous-espaces  $Y_n \subset L_n^1$  tels que  $\forall n, \forall x \in Y_n : \delta \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ . Alors, il existe  $K$  telle que, si  $\sigma_n : L_n^1 \rightarrow L_n^1 / Y_n$  est l'application quotient, on a*

$$\forall f \in \tilde{H}^1(L_n^1 / Y_n), \quad \exists g \in \tilde{H}^1(L_n^1) : \tilde{\sigma}_n(g) = f \quad \text{et} \quad \|g\|_{\tilde{H}^1(L_n^1)} \leq K \|f\|_{\tilde{H}^1(L_n^1 / Y_n)}.$$

Soit  $\{u_{k,n,\ell}\}_{\ell \in \Lambda_n^k}$  la famille des opérateurs de  $S_n^k$  dans  $E_0$ . On pose

$$\Lambda = \bigcup \{(k, n) \times \Lambda_n^k : k = 1, 2 \text{ et } n \geq 1\}.$$

Si  $\lambda = (k, n, \ell) \in \Lambda$ , on définit

$$(B_\lambda, S_\lambda, u_\lambda) = (B_n^k, S_n^k, u_{k,n,\ell}).$$

Le corollaire 5 s'applique alors à cette famille, et on trouve  $E_1$  vérifiant le premier point du théorème; par contre le deuxième point est démontré en utilisant le point 2. du corollaire 5 dans [P3], p.141.

**Théorème 7.** *Tout espace de Banach  $H^1$ -projectif  $E$  est isométriquement contenue dans un espace de Banach  $H^1$ -projectif  $X$ , tel que  $X \widehat{\otimes} X = X \overset{\vee}{\otimes} X$ .*

En effet, si  $E_0 = E$  est  $H^1(\mu, \sigma_0, I_0)$ , alors en appliquant le théorème 6 à  $E_0$  puis à  $E_1, E_2$  etc., on construit  $\{(E_n, j_n)\}_{n \geq 1}$  où  $j_n : E_n \hookrightarrow E_{n+1}$  est une injection isométrique,  $E_n$  est  $H^1(\mu, \sigma_n, I_n)$  avec  $I_n \subset I_{n+1}$  et  $j_n \circ \sigma_n = \sigma_{n+1} \circ s_n$ ;

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & \xrightarrow{j_0} & E_1 & \xrightarrow{j_1} & \dots & E_n & \xrightarrow{j_n} & E_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & \dots \\ \uparrow \sigma_0 & & \uparrow \sigma_1 & & & \uparrow \sigma_n & & \uparrow \sigma_{n+1} & & \\ \ell^1(I_0) & \xrightarrow{s_0} & \ell^1(I_1) & \xrightarrow{s_1} & \dots & \ell^1(I_n) & \xrightarrow{s_n} & \ell^1(I_{n+1}) & \xrightarrow{s_{n+1}} & \dots \end{array}$$

de plus

$$\forall u \in E_n \otimes E_n, \text{ on a } \|j_n \otimes_n (u)\|_{E_n \widehat{\otimes} E_n} \leq c(\mu) \|u\|_{E_{n+1} \widehat{\otimes} E_{n+1}}.$$

Prenons  $X$  la limite inductive de  $\{(E_n, j_n)\}_{n \geq 1}$  qui peut être identifiée à  $\overline{\cup E_n}$ . Notons  $I = \cup I_n$ . Il est clair que  $\cup \ell^1(I_n)$  peut être considéré comme un sous-espace dense dans  $\ell^1(I)$ . On définit alors  $\sigma : \ell^1(I) \rightarrow X$  par  $\sigma(\alpha) = \sigma_n(\alpha)$  si  $\alpha \in \ell^1(I_n)$ .

En utilisant des arguments standards de densité, on démontre que  $\tilde{\sigma}$  est surjectif, et que  $X \widehat{\otimes} X = X \overset{\vee}{\otimes} X$ . Ce qui démontre le théorème.

*Remarques.*

- Il n'est pas difficile de modifier la construction précédente pour trouver  $X$  vérifiant le théorème 7, et tel que  $X$  et son dual  $X^*$  soient des espaces de cotype 2, vérifiant le théorème de Grothendieck.
- Cet exemple montre aussi que le produit tensoriel projectif de deux espaces Hardy-convexifiables (cf. [X]) n'est pas, en général, Hardy-convexifiable.
- On peut aussi construire un espace de Banach  $X$ ,  $H^1$ -projectif, ayant la propriété d'approximation, et tel que  $X \widehat{\otimes} X$  ne soit pas  $H^1$ -projectif.

#### RÉFÉRENCES

- [BD] J. BOURGAIN AND W.J. DAVIS, Martingales transforms and complex uniform convexity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 294 (1986), 501–515.
- [HP] U. HAAGERUP AND G. PISIER, Factorization of analytic functions with values in non-commutative  $L^1$ -spaces, *Canad. J. Math.* 41 (1989), 882–906.
- [K] O. KOUBA,  $H^1$ -projective spaces *Quat. J. Math. Oxford (2)* 41(1990), 295–312.
- [P1] G. PISIER, Factorization of operator valued analytic functions, *Advances in Math.* 93 No 1, (1992), 61–125.
- [P2] G. PISIER, Counterexamples to a conjecture of Grothendieck, *Acta Math.* 151, (1983), 181–208.
- [P3] G. PISIER, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS No 60, A.M.S. Providence (1987).

- [X] Q. XU, Inégalités pour les martingales de Hardy et renormage des espaces quasi-normés, *C.R. Acad. Sci. Paris t. 307 Série I*, (1988), 601–604.